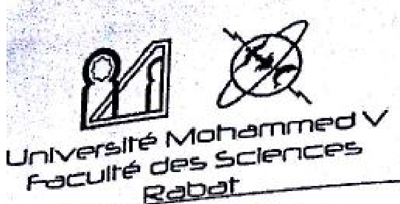


Master
Avancées de la Physique Quantique:
Applications à la théorie de l'information

Module : Introduction à la théorie de l'information
Examen Final – Durée : 2h00

Partie I :

Le moment magnétique d'une particule de spin 1/2 est donné par : $\vec{\mu} = \mu_0\vec{\sigma}$, où $\sigma_i = \pm 1$ pour $i = x, y$ *ou* z. On place la substance constituée de N atomes, à la température T dans un champ magnétique $\vec{H}$. L'Hamiltonien s'écrit $\mathcal{H}_1 = -\vec{\mu}.\vec{H}$. Ce système est décrit par un ensemble canonique quantique. On considère que le champ magnétique appliqué est suivant l'axe des z : $\vec{H} = H\vec{e}_z$.

1) Montrer que la fonction de partition de l'ensemble s'écrit sous la forme $Z_N = (Z_1)^N$ où Z_1 est la fonction de partition à une particule donnée par la relation
$$Z_1 = 2\cosh\left(\frac{\mu_0 H}{k_B T}\right) = 2\cosh(\beta\mu_0 H).$$
2) A partir de la fonction de partition à une particule Z_1, établir l'expression de la valeur moyenne du moment magnétique d'une particule, $\langle\mu_z\rangle$.
3) Montrer que l'énergie magnétique libre de Gibbs par particule s'écrit sous la forme :
$$g(T,H) = -k_B T \ln\left[2\cosh\left(\frac{\mu_0 H}{k_B T}\right)\right]$$
4) Etablir l'expression l'entropie par particule.
5) En déduire l'expression de la chaleur spécifique à champ fixe.
6) Etablir l'expression de l'aimantation par particule m et comparer au résultat de la question 2.
7) En déduire l'expression de la susceptibilité magnétique $\chi(T,H)$.
8) Discuter de la possibilité d'existence de transition de phase avec ce modèle.

Partie II :

Dans le modèle de Curie-Weiss, on adopte le champ effectif : $H_{eff} = H + \lambda\, m$, où H est le champ magnétique externe, m est l'aimantation à une particule et λ est un paramètre.

9) Etablir les expressions de la fonction de partition, et de l'énergie libre de Gibbs à une particule.

10) Démontrer que l'aimantation à une particule s'écrit sous la forme
$$m = \tanh(\beta\mu_0 H + \beta\mu_0\lambda m).$$

Le développement au voisinage du point critique ($T \approx T_C \approx, H \approx 0$), de cette expression s'écrit : $\beta\mu_0 H + \beta\mu_0\lambda m = \tanh^{-1} m = m + \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{5}m^5 + \cdots$

11) Utiliser ce développement pour étudier le comportement asymptotique, et établir les valeurs des exposants critiques : β, γ, δ *et* α.

Questions de cours:

A) Rappeler l'expression de l'Hamiltonien du modèle de Ising à 3 dimensions et expliquer la signification de chaque terme de l'Haimltonien.

B) Rappeler la définition d'une transition de phase, et spécifier la différence entre une transition de phase de premier ordre et une transition de phase continue.

C) Rappeler la définition du point critique dans un diagramme de phase donné.

D) Rappeler la définition et le rôle des exposants critiques.